ALGEBRA M1 – Lista 9

Geometria analityczna

Zad.1. Wektory $\vec{u}, \vec{v}$ są przekątnymi równoległoboku. Wyrazić za ich pomocą boki tego równoległoboku.

Zad.2. Uzasadnić, że środkowe trójkąta przecinaja się w jednym punkcie.

Zad.3. Wyprowadzić wzór wyznacznikowy na iloczyn wektorowy:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

gdzie $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$.

Zad.4. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach w punktach $(1, -1, 3), (0, 2, -3), (2, 2, 1)$.

Zad.5. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach w punktach $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, -1)$, $(2, 0, -2)$.

Zad.6. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{u} = (0, 2, -5)$, $\vec{v} = (1, 3, -2)$, $\vec{w} = (4, -1, 3)$ oraz obliczyć wysokość opuszczoną na podstawę zbudowaną na wektorach $\vec{u}, \vec{w}$.

Zad. 7. Zbadać, czy punkty $A = (1, 0, 2)$, $B = (5, 1, 5)$, $C = (3, -1, 2)$, $D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie.

Zad.8. Napisać równania kierunkowe i parametryczne płaszczyzn spełniających podane warunki:

1. płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (1, -3, 4)$, $P_2 = (2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny xy,
2. płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{u} = (0, 0, 1)$,
3. płaszczyna przechodzi przez punkt $P = (0, 3, 0)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi : \ 3x - y + 2 = 0$,
4. płaszczyna przechodzi przez punkt $P = (2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : \ x + y = 0$, $\pi_2 : \ y - z = 0$.

Zad.9. Napisać równania kierunkowe i parametryczne prostych spełniających podane warunki:

1. prosta przechodzi przez punkt $P = (-3, 5, 2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (2, -1, 3)$,
2. prosta przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 0, 6)$, $P_2 = (-2, 2, 4)$,
3. prosta przechodzi przez punkt $P = (0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : \ 3x - y + 2z - 6 = 0$,

4. prosta przechodzi przez punkt $P = (7, 2, 0)$ i jest prostopadła do wektorów $\vec{v} = (2, 0, -3)$, $\vec{u} = (-1, 2, 0)$.

Zad.9. Dla jakich wartości parametru λ punkty $P = (1, -2, 2)$, $Q = (-2, \lambda, 3)$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\pi: \; x - 2y + 3z + 13 = 0$?

Zad.10. Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu $P = (2, -7, 10)$ względem płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $Q = (3, 2, 2)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = (1, -3, 2)$.

Zad.11. Z rodziny płaszczyzn równoległych do płaszczyzny $\pi: \; 3x - 4y + 12z = 0$ wybrać płaszczyzny odległe od początku układu o $d = 2$.

Zad.12. Płaszczyzny $\pi_1 : 6x - 4y + 5z + 1 = 0$ oraz $\pi_2 : -4x + 3y - 4z + 2 = 0$ przecinają się wzdłuż prostej l. Znaleźć równanie paramteryczne tej prostej.

Zad.13. Wyznaczyć rzut prostokątny punktu $(1, 2, 4)$ na płaszczyznę $\pi: \; x + y - 3z = 0$.

Zad.14. Wyznaczyć rzut ukośny punktu $(1, 2, 4)$ w kierunku wektora $\vec{v} = (1, -1, 1)$ na płaszczyznę $\pi: \; x + y - 3z + 1 = 0$.

Zad.15. Wyznaczyć rzut prostokątny prostej

$$l: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

na płaszczyznę $\pi: \; x - y - z = 0$.

Zad.16. Wyznaczyć rzut ukośny prostej z poprzedniego zadania w kierunku wektora $(1, 0, 1)$ na płaszczyznę $\pi: \; x - y - z - 0$.

Zad.17. Obliczyć odległość punktu $P = (1, 2, 2)$ od płaszczyzny $\pi: \; x + y - z + 0$.

Zad.18. Obliczyć odległość punktu $P = (1, -1, 2)$ od prostej

$$l: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

Zad.19. Obliczyć odległość prostej

$$l_2: \begin{cases} x = s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 - 2s \end{cases}$$

od płaszczyzny $\pi: \; y + z + 1 = 0$.

Zad.20. Obliczyć odległość prostych skośnych:

$$l_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} x = s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 - 2s \end{cases}$$

Zad.21. Znaleźć punkt przecięcia prostych

$$l_1: \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} 2x - y - 2z + 8 = 0 \\ x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$